Die unglaubliche Beweis-Maschine

Mathetag, 13.11.2026, Mathematisches Institut



https://pfaffelh.github.io/ipm/

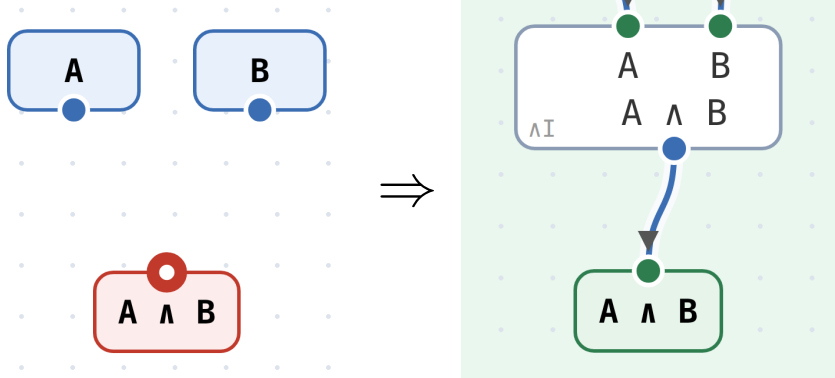
Die unglaubliche Beweis-Maschine

- Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, das wahr oder falsch sein kann.
- Beispiele:

  Heute ist Mathetag.
  Aristoteles war ein Mensch.
  Alle Menschen sind sterblich.
  $1 + 1 = 1$.
- Wir schreiben A, B, C für beliebige solche Aussagen.

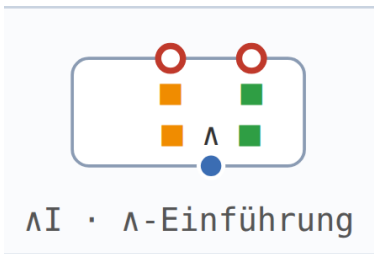
So wird gespielt

- Oben stehen die Annahmen, unten das Ziel.
- Ein roter Kreis ist etwas, das noch zu beweisen ist.
- Ein blauer Punkt ist etwas, das wir haben.
- Die Regeln sind Bausteine. Wir verbinden Punkte und Kreise mit Linien.
- Fertig, wenn kein roter Kreis übrig ist.
- Farbige Kästchen ■ ■ stehen für beliebige Aussagen.

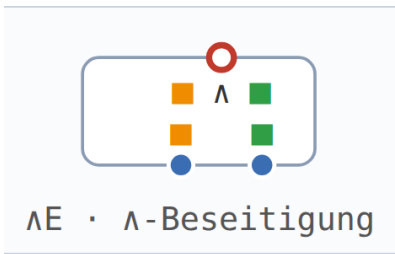


Welt 1: Konjunktion

- $A \wedge B$ ist die Aussage A *und* B *(sind wahr).*
- $\wedge$-Einführung: Aus A und B folgt $A \wedge B$.
- $\wedge$-Beseitigung: Aus $A \wedge B$ folgen A und B.



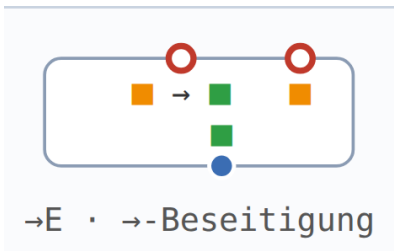
∧I · ∧-Einführung

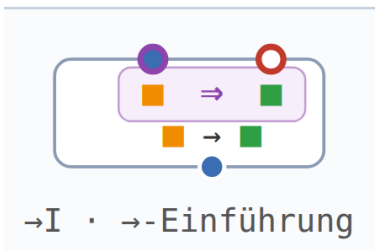


∧E · ∧-Beseitigung

Welt 2: Implikation

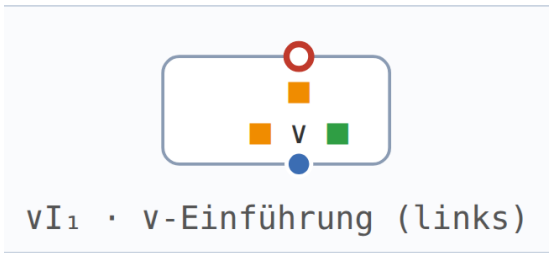
- $A \to B$ ist die Aussage *Wenn A, dann B*, etwa *Wenn es regnet, dann ist die Straße nass.*
- $A \to B$ kann wahr sein, selbst wenn A nicht wahr ist.
- $\to$-Beseitigung: Aus $A \to B$ und A folgt B.
- $\to$-Einführung: Um $A \to B$ zu beweisen, beweise B mit der lokalen Annahme A (blauer Punkt mit lila Ring).

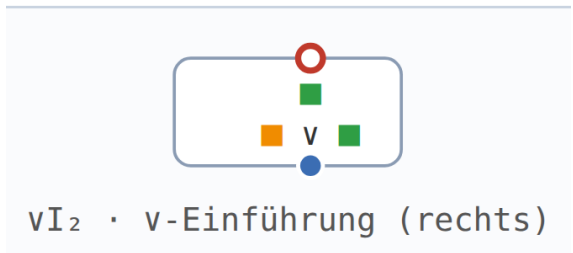


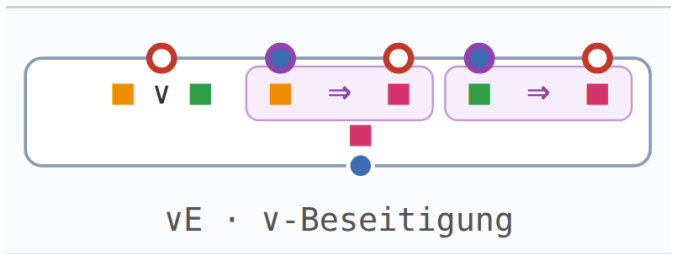


Welt 3: Disjunktion

- $A \vee B$ ist die Aussage A *oder* B *(ist wahr).*
- $\vee$-Einführung: Aus A folgt $A \vee B$, und aus B folgt $A \vee B$.
- $\vee$-Beseitigung ist eine Fallunterscheidung: Aus $A \vee B$ folgt C, wenn wir C einmal mit der Annahme A und einmal mit der Annahme B beweisen.

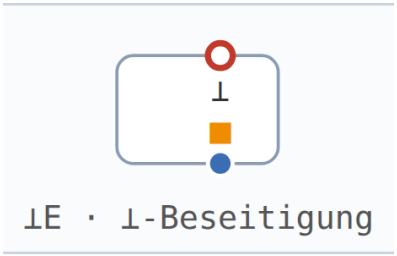






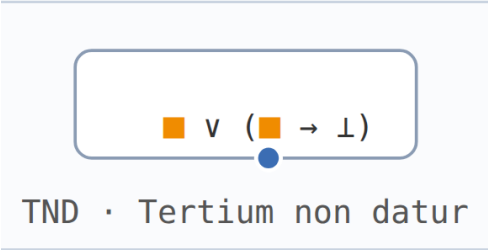
Welt 4: Falsum und Negation

- $\bot$ (Falsum) ist eine Aussage, die nie wahr ist.
- Aus einer falschen Aussage folgt alles. Wahr ist zum Beispiel:
  Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann ist $1 + 1 = 1$.
- *A ist falsch* schreiben wir als $A \to \bot$.

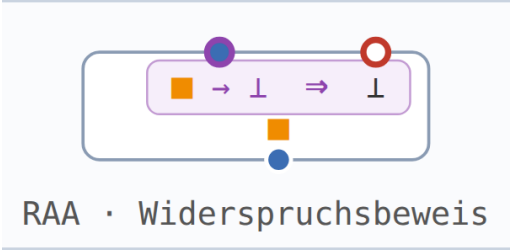


Welt 5: Klassische Logik

- Mit den bisherigen Regeln können wir nicht beweisen, dass jede Aussage A wahr oder falsch ist, also $A \vee (A \to \bot)$.
- Ausweg: Man muss es fordern (Tertium non datur).
- Widerspruchsbeweis: Um A zu beweisen, nimm $A \to \bot$ an und leite $\bot$ her.



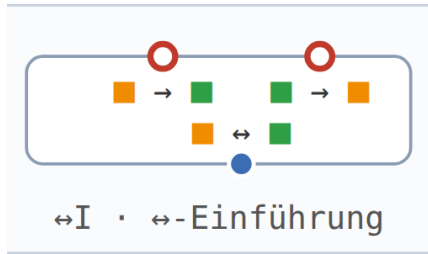
TND · Tertium non datur

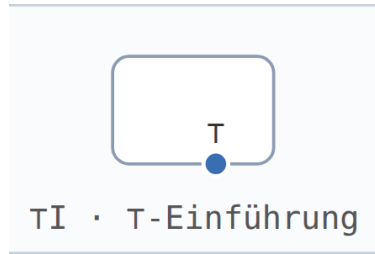


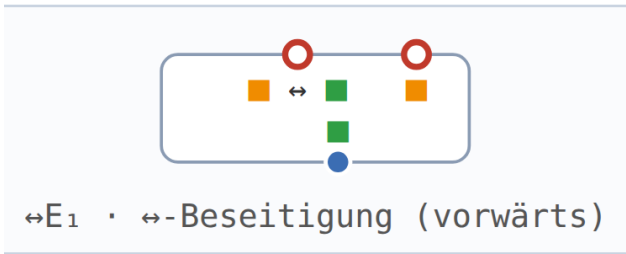
RAA · Widerspruchsbeweis

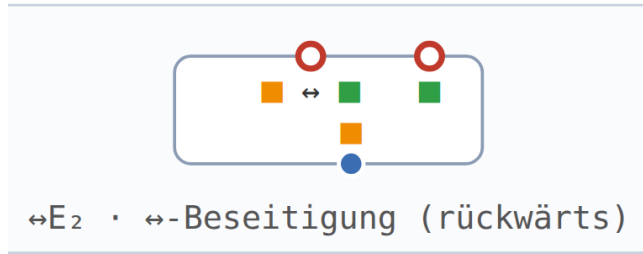
Welt 6: Äquivalenz und Wahrheit

- $A \leftrightarrow B$ ist die Aussage A *genau dann, wenn* B.
- $\leftrightarrow$-Einführung: Aus $A \to B$ und $B \to A$ folgt $A \leftrightarrow B$.
- $\leftrightarrow$-Beseitigung: Aus $A \leftrightarrow B$ und A folgt B, und aus $A \leftrightarrow B$ und B folgt A.
- $\top$ ist eine Aussage, die immer wahr ist.



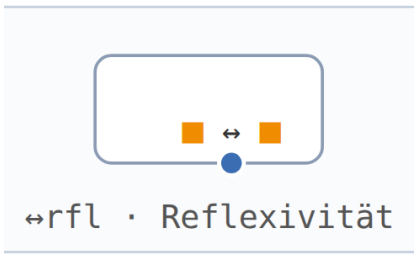


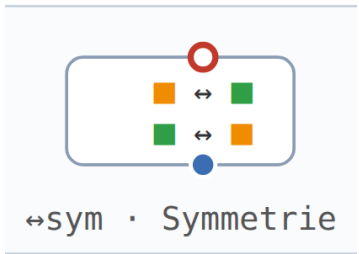


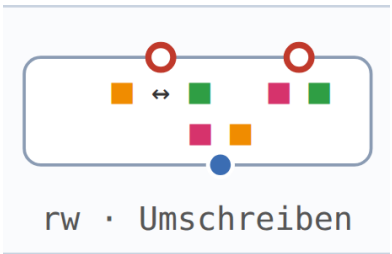


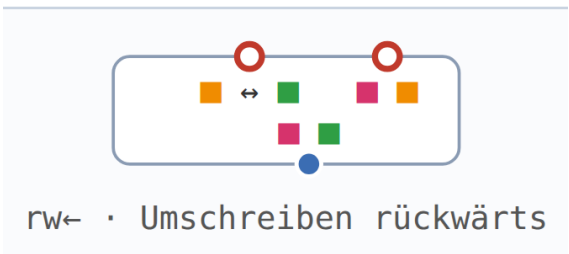
Welt 7: Umschreiben

- Äquivalente Aussagen dürfen einander ersetzen.
- $A \leftrightarrow A$ gilt immer, und aus $A \leftrightarrow B$ folgt $B \leftrightarrow A$.
- Aus $A \leftrightarrow B$ und einer Aussage, in der B vorkommt, folgt dieselbe Aussage mit A an dieser Stelle.



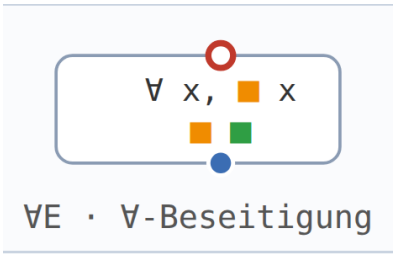




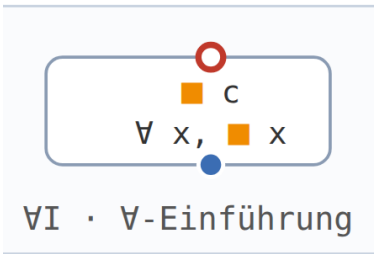


Welt 8: Quantoren

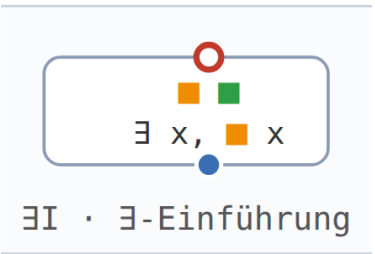
- Aussagen können von Variablen abhängen, z.B. *Es gilt* $x^2 = 2$. Wir schreiben $P\,x$.
- $\forall x, P\,x$: *Für alle* x *gilt* $P\,x$.
- $\exists x, P\,x$: *Es gibt ein* x*, so dass* $P\,x$ *gilt.*



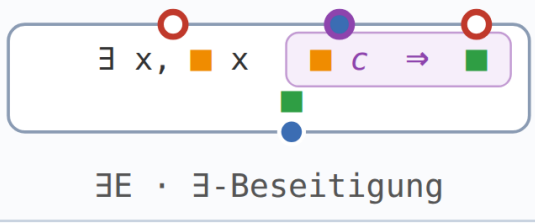
∀E · ∀-Beseitigung



∀I · ∀-Einführung



∃I · ∃-Einführung



∃E · ∃-Beseitigung

Welt 9: Rätsel

- Drei Rätsel. Alle brauchen klassische Logik und etwas Planung.
- Das Trinker-Paradox: In jeder Kneipe gibt es jemanden, für den gilt: Wenn er trinkt, trinken alle.

```
∃ x, P x → (∀ y, P y)
```

Welt 10: Induktion

- Aussagen über die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, \ldots$
- Um $\forall n, P\, n$ zu beweisen, beweise
  - den Anfang $P\, 0$, und
  - den Schritt: $P\,(c + 1)$ aus der Annahme $P\, c$, für eine beliebige Zahl c.

